



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA NÚMEROS COMPLEJOS - I

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Definición

En $\mathbb{R}^2$, definimos las operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

entonces $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un cuerpo, llamado el cuerpo de los números complejos.

$(0, 0)$ es el neutro aditivo

$(1, 0)$ es el neutro multiplicativo

$$-(a, b) = (-a, -b)$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right), \text{ si } (a, b) \neq (0, 0)$$

FORMA RECTANGULAR DE UN COMPLEJO

Con las operaciones anteriores se tiene

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \quad (I)$$

Donde:

$i = (0, 1)$ (unidad imaginaria) y $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Asignando $(a, 0) = a$ y $(b, 0) = b$ reemplazando en (I) se obtiene.

$z = (a, b) = a + bi$ tal que $a, b \in \mathbb{R}$ (Forma Rectangular)

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Luego se definen la suma y producto de esta forma

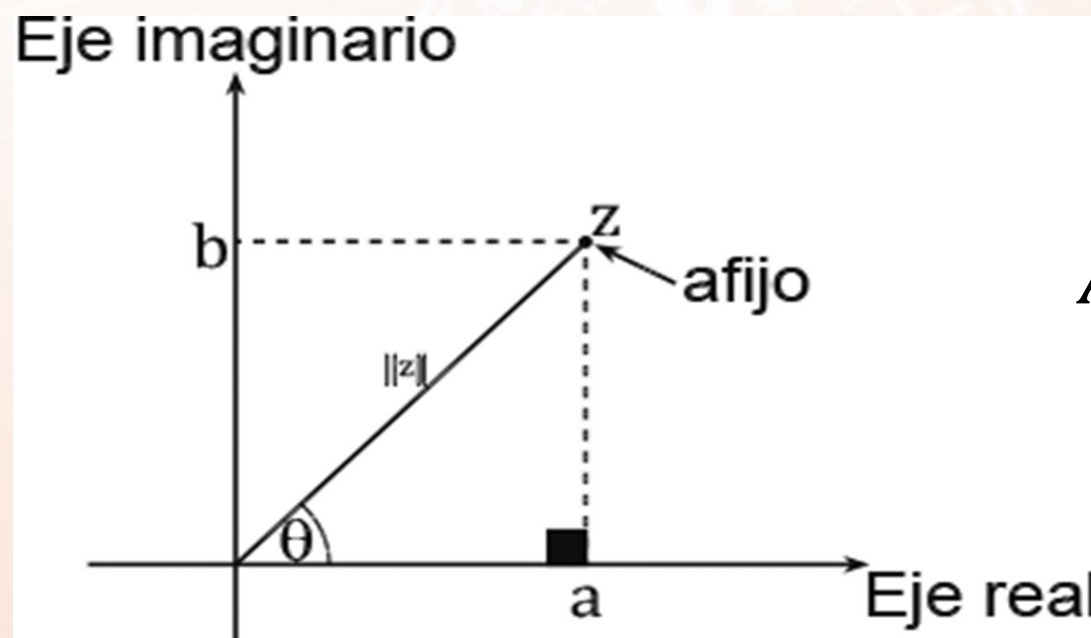
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Como los números complejos son pares ordenados, entonces podemos efectuar una representación de los mismos en un plano cartesiano rectangular. En esta representación se le denomina eje real (Re) al eje de las x y eje imaginario (Im) al eje de las y. Al plano $\mathbb{R}^2$ se le llama Plano Complejo o plano de Gauss, siempre que se consideren sus puntos como números complejos.

Gráfica



Argumento Principal
 $\text{Arg}(z) = \theta \in [0, 2\pi)$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

PARTE REAL E IMAGINARIA DE UN COMPLEJO

Definición

Dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$, definimos

$x = \operatorname{Re}(z)$, Parte real de z

$y = \operatorname{Im}(z)$, Parte imaginaria de z

COMPLEJOS IGUALES

Sean los números complejos: $z_1 = (a; b) \wedge z_2 = (c; d)$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2): & a = c \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2): & b = d \end{cases}$$

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sea $z = (a; b) \in \mathbb{C}$:

1. Complejo nulo

$$z = (0,0) = 0 + i0 = 0$$

2. Imaginario puro

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad z = (0, b) = 0 + bi = bi$$

3. Real puro

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad z = (a, 0) = a + 0i = a$$

POTENCIA DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Se tiene que.

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = i$$

$$i^9 = i^8 \cdot i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = -i$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$\vdots$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

Propiedad

$$\forall k, r \in \mathbb{Z}$$

1)
$$i^{4k+r} = i^r$$

Ejemplos:

$$i^{35} = i^{32+3} = i^{4+3} = i^3 = -i$$

$$i^{442} = i^{440+2} = i^{4+2} = i^2 = -1$$

2)
$$i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0$$

Ejemplo: $i^1 + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

3)
$$i^{-k} = (-i)^k$$

Ejemplo: $i^{-1234567} = (-i)^{1234567} = -i^{1234567} = -i^{4+3} = -i^3 = i$

OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

1. Sean $z_1 = 5 + i$; $z_2 = -1 + 2i$

Tendremos que:

$$z_1 + z_2 = 5 + i - 1 + 2i = 4 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = (5 + i) - (-1 + 2i) = 6 - i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + i)(-1 + 2i) = -5 + 10i - i + 2i^2 = -7 + 9i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left\{ \frac{5 + i}{-1 + 2i} \right\} \left\{ \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} \right\} = \frac{-5 - 10i - i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-3 - 11i}{5}$$

OPERACIONES NOTABLES

$$1.- (1 + i)^2 = 2i$$

$$2.- (1 - i)^2 = -2i$$

$$3.- \frac{1+i}{1-i} = i, \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$4.- (1 + i)^4 = -4$$

$$5.- (1 - i)^4 = -4$$

$$6.- \frac{1}{i} = -i$$

Ejemplo:1

Determine el valor de $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un entero positivo.

A) -2

B) $2i^n$

C) $-2i^{n+1}$

D) $-2i$

E) $2i^{n+1}$

Resolución:

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n (1-i)^{-2}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n \cdot (1-i)^2 = i^n (-2i) = -2i^{n+1}$$

Ejemplo : 2

Determine E, siendo:

$$E = \frac{1 + i + 2 + 2i + 3 + 3i + \dots + n + ni}{1 - i + 2 - 2i + 3 - 3i + \dots + n - ni}$$

Solución

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1+2+3\dots+n)+i(1+2+3\dots+n)}{(1+2+3\dots+n)-i(1+2+3\dots+n)} \\ &= \frac{(1+2+3\dots+n)(1+i)}{(1+2+3\dots+n)(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{(1^2-i^2)} \\ &= \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Determine aquel número n entero positivo múltiplo de cuatro que verifica la igualdad $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n = 64 - 64i$, tal que $i = (0; 1)$.

Resolución:

De la condición

$$\underbrace{i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n}_m = 64(1 - i)$$

$$\rightarrow m = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + ni^n \quad (\text{I})$$

Multiplicando por i en (I)

$$im = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + 4i^5 + \dots + ni^{n+1} \quad (\text{II})$$

Luego (I) – (II)

$$(1 - i)m = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^n}_0 - ni^{n+1}$$

Como $n = 4$ tenemos

$$(1 - i)m = -ni \rightarrow m = \frac{-ni}{1-i}$$

Reemplazando el valor de m en la condición

$$\frac{-ni}{1-i} = 64(1 - i) \rightarrow -ni = 64(1 - i)^2$$

$$-ni = 64(-2i) \rightarrow -ni = -128i$$

$$\therefore n = 128$$

Ejemplo 4.

Al reducir el complejo, $\frac{a-i}{b+2i}$, resulta un número imaginario puro,

además también al reducir el complejo $\frac{b-i}{a-2i}$, resulta un número real.

Determinar "a" y "b" ($a \geq 0 \wedge b \geq 0$).

Solución:

$$i) \frac{(a-i)}{(b+2i)} = ki \text{ (imaginario puro)} \Rightarrow a - i = ki(b + 2i) \Rightarrow a - i = -2k + bki \dots (*)$$

$$\text{en } (*) \text{ se tiene } a = -2k, -1 = bk \Rightarrow ab = 2 \dots (I)$$

$$ii) \frac{(b-i)}{(a-2i)} = m \text{ (complejo real)} \Rightarrow (b - i) = m(a - 2i) \Rightarrow b = ma, \quad 2m = 1 \Rightarrow a = 2b \dots (II)$$

$$\text{Reemplazando (II) en (I): } 2b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$\therefore b = 1 \quad (\text{se pide } b \geq 0)$$

$$\text{Luego: } a(1) = 2 \quad \therefore a = 2$$

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN COMPLEJO

1. Dado el complejo $z = (x; y) = x + yi$, se define el conjugado de z denotado $\bar{z}$, tal que

$$\bar{z} = (x; -y) = x - yi$$

Ejemplo: Sea $z = 13 - 6i$

$$\bar{z} = 13 + 6i$$

$$z_1 = 12 - 23i$$

$$\bar{z}_1 = 12 + 23i$$

2. Dado el complejo $z = (x; y) = x + yi$, se define el opuesto de z denotado por $-z$, tal que

$$-z = (-x; -y) = -x - yi.$$

Ejemplo: $z = (-2 + 57i)$

$$-z = (2; -57)$$

$$w = (2 - 13i)$$

$$-w = -2 + 13i$$

Ejemplo:

Teniendo $z_1 = (-3; 2)$, $z_2 = (-1; 5)$, $z_3 = (-3; 0)$, $z_4 = (-1; -5)$

$$\text{obtener } M = \frac{z_1 \cdot z_3 - \bar{z}_4 \cdot z_2}{z_1 + \bar{z}_4}$$

Resolución:

Expresando los pares ordenados como números complejos:

$$z_1 = -3 + 2i; z_2 = -1 + 5i; z_3 = -3 + 0i; \bar{z}_4 = -1 - 5i$$

su conjugado $\bar{z}_4 = -1 + 5i$.

$$\text{Luego: } z_1 \cdot z_3 = (-3 + 2i)(-3 + 0i) = 9 - 6i$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_4 \cdot z_2 &= (-1 + 5i)(-1 + 5i) = (-1 + 5i)^2 = (-1)^2 + 10i + (5i)^2 \\ &= 1 - 10i - 25 = -24 - 10i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_4 \cdot z_2 &= (-1 + 5i)(-1 + 5i) = (-1 + 5i)^2 = (-1)^2 + 10i + (5i)^2 \\ &= 1 - 10i - 25 = -24 - 10i\end{aligned}$$

$$z_1 + \bar{z}_4 = (-3 + 2i) + (-1 + 5i) = -4 + 7i$$

Reemplazando:

$$M = \frac{9 - 6i - (-24 - 10i)}{-4 + 7i} = \frac{(33 + 4i)}{-4 + 7i} \cdot \frac{(-4 - 7i)}{(-4 - 7i)}$$

$$M = \frac{-132 - 231i - 16i + 28}{65} = -\frac{104 + 247i}{65}$$

PROPIEDADES DE LA CONJUGADA

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $z, w \in \mathbb{C}$

1. $\overline{az + bw} = a \bar{z} + b \bar{w}$

2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

3. $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1} ; z \neq 0$

4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} ; w \neq 0$

5. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} ;$

6. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

7. $\bar{z} \cdot z = |z|^2$

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado $z = a + bi$, el módulo de z es un número real no negativo denotado por $|z|$, tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo: En cada caso, halle el módulo de los siguientes complejos:

$$z_1 = 5 + i \rightarrow |z_1| = \sqrt{(5)^2 + (1)^2} = \sqrt{26}$$

$$z_2 = 1 - 3i \rightarrow |z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$z_3 = 9 \rightarrow |z_3| = \sqrt{(9)^2 + (0)^2} = 9$$

$$z_4 = 2i \rightarrow |z_4| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$$

Propiedades del módulo

Sean $z, w \in \mathbb{C}$.

1. $|z \cdot w| = |z||w|$

2. $|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad ; \quad z \neq 0$

3. $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad ; \quad w \neq 0$

4. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

5. $|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Desigualdad triangular})$

6. $||z| - |w|| \leq |z - w|$

7. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z^n| = |z|^n$

Ejemplo:

Siendo $z = \frac{(2+i)(\sqrt{3}-i)}{4(1-2i)}$, determinar el módulo de z .

Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$\left| \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \right| = \frac{|z_1| |z_2|}{|z_3|} \quad \forall z_1; z_2; z_3 \in \mathbb{C}, z_3 \neq 0$$

reemplazando

$$|z| = \frac{|2+i| |\sqrt{3}-i|}{|4| |1-2i|}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}}{4 \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}}{4 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

Propiedades del argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ no nulos.

1. $\text{Arg}(rz) = \text{Arg}(z)$, si $r \in \mathbb{R}^+$.

2. $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\text{Arg}(z \cdot w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\text{Arg}(z^{-1}) = \text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

5. $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w) + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo:

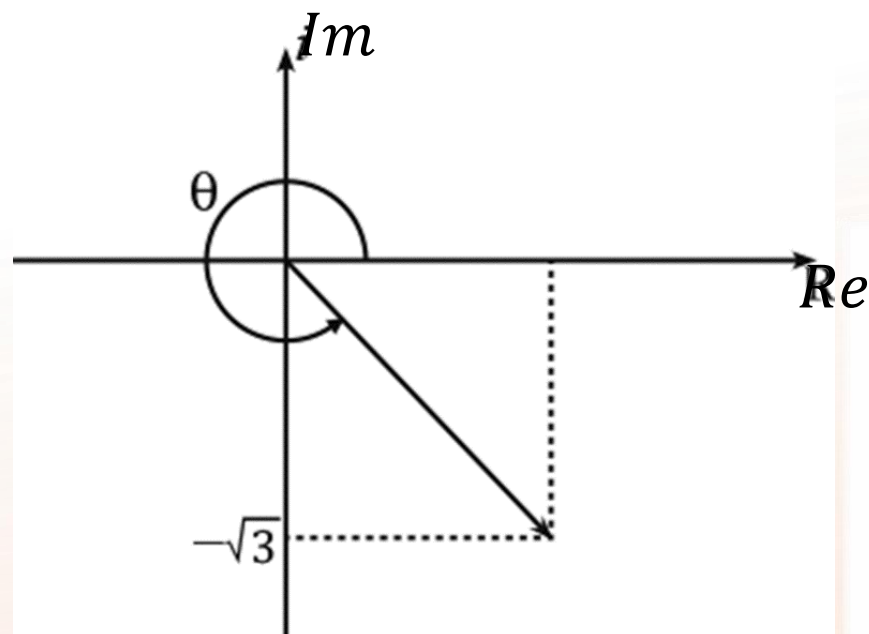
Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$ hallar

I. $\text{Arg}(z^4)$

II. $\text{Arg}(\bar{z})$

III. $\text{Arg}(-z)$

IV. $\text{Arg}(iz)$



$$\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{3}$$

Solución:

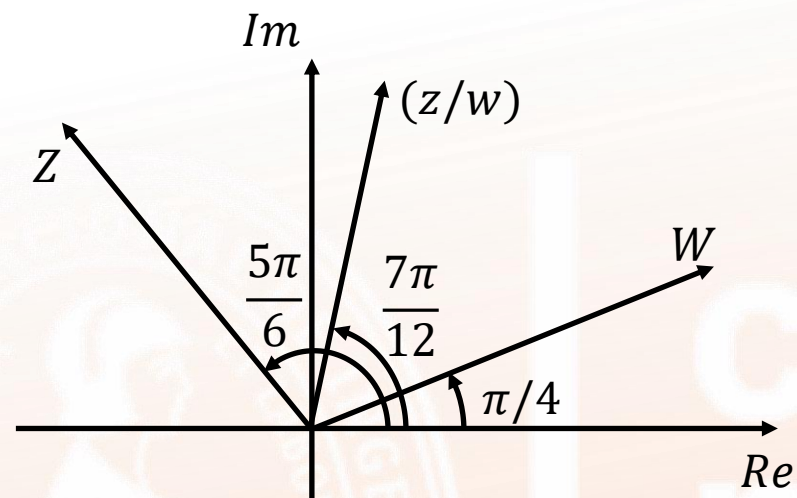
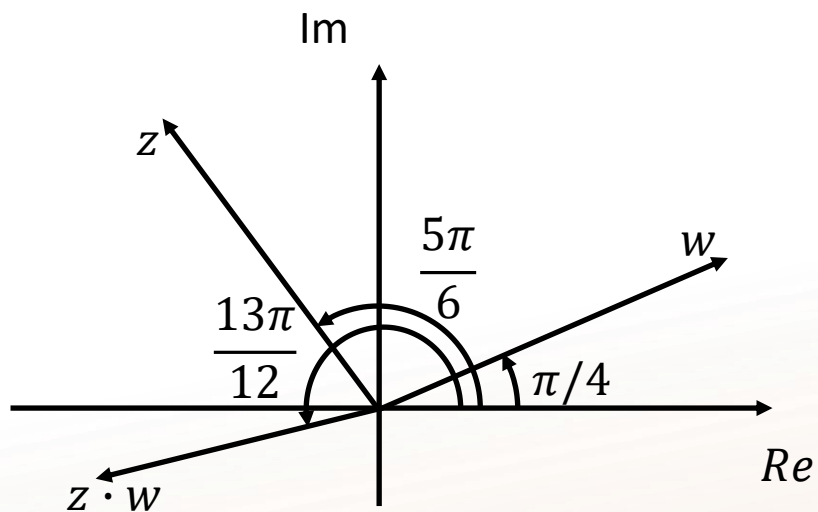
$$\begin{aligned} \text{I. } \text{Arg}(z^4) &= 4 \text{Arg}(z) + 2k\pi \\ &= 20 \frac{\pi}{3} + \underset{\substack{\downarrow \\ (-3)}}{2k\pi} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{II. } \text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi = \frac{\pi}{3}$$
$$\quad \quad \quad -\frac{5\pi}{3} \quad \quad \quad \downarrow$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (1)$$

$$\text{III. } \text{Arg}(-z) = \text{Arg}(-z) = \text{Arg}(-1) + \text{Arg}(z) - 2k\pi$$
$$\quad \quad \quad = \quad \pi \quad + \quad \frac{5\pi}{3} \quad + \quad 2k\pi = \frac{2\pi}{3}$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (-1)$$

$$\text{IV. } \text{Arg}(iz) = \text{Arg}(i) + \text{Arg}(z) - 2k\pi$$
$$\quad \quad \quad \frac{\pi}{2} \quad + \quad \frac{5\pi}{3} \quad + \quad 2k\pi = \frac{\pi}{6}$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (-1)$$

Graficando los argumentos de $z \cdot w$ y $\frac{z}{w}$



Problema 1.

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I) $\forall z \in \mathbb{C}, |z + 2i| \leq |2z - i| + |z - 3i|.$
- II) Si $|z + 1| \leq |z|$, entonces $Re(z) < \frac{1}{2}$
- III) Si z se localiza en el primer cuadrante, entonces $-z$ se localiza en el segundo cuadrante.

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FVF

Problema 2.

Determine $|\bar{z}|$, si $\frac{(4 - i)\sqrt{\sqrt{z}}}{3 + 2\sqrt{2}i} = 1 - \sqrt{3}i.$

A) 17 B) 25 C) 8 D) 4 E) 16